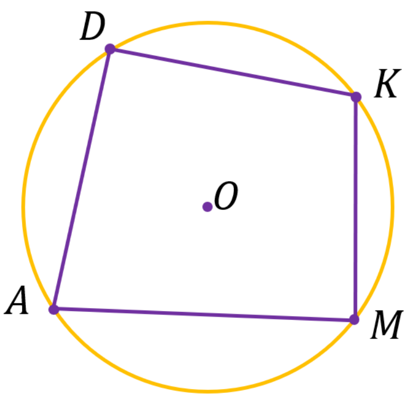
Властивість кутів вписаного чотирикутника



Теорема: Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.

Доведення:

Нехай у коло з центром O вписано довільний чотирикутник $ADKM$.

За теоремою про вписаний кут:

$\angle DAM = \frac{1}{2} \smile DKM$; $\angle DKM = \frac{1}{2} \smile DAM$.

Звідси, $\angle DAM + \angle DKM = \frac{1}{2} \smile DKM + \frac{1}{2} \smile DAM$.

$\angle DAM + \angle DKM = \frac{1}{2}(\smile DKM + \smile DAM) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Аналогічно можна довести, що $\angle ADK + \angle AMK = 180°$.

Отже, $\angle DAM + \angle DKM = 180°$; $\angle ADK + \angle AMK = 180°$.

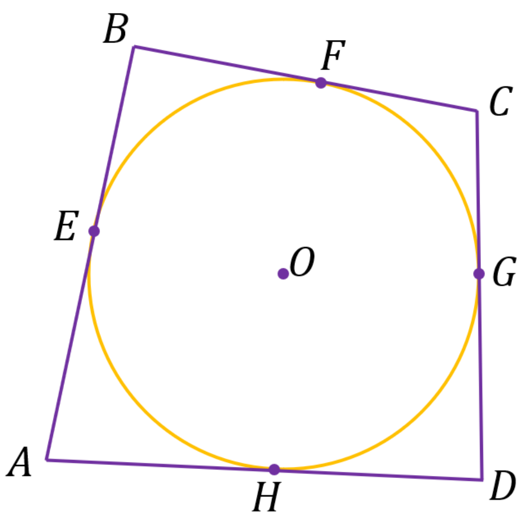
Доведено!

Властивість сторін описаного чотирикутника

Теорема: В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні між собою.

Доведення:

Нехай навколо кола з центром O описано довільний чотирикутник $ABCD$.



Сторони AB, BC, CD та AD даного чотирикутника дотикаються до кола в точках E, F, G, H відповідно.

Доведемо, що $AB + CD = BC + AD$.

За основною властивістю вимірювання відрізків:

$AB = AE + EB$;

$BC = BF + FC$;

$CD = CG + GD$;

$AD = AH + HD$.

За властивістю дотичних, проведених з однієї точки:

$AE = AH$; $EB = BF$; $FC = CG$; $GD = HD$.

Звідси, $AB + CD = AE + EB + CG + GD$; $BC + AD = BF + FC + AH + HD$.

$AB + CD = AH + BF + CG + HD$;

$BC + AD = BF + CG + AH + HD$.

Оскільки, праві частини рівностей однакові, то рівними є й ліві частини рівностей.

Отже, $AB + CD = BC + AD$.

Доведено!