Властивості та ознаки трапеції

Теорема (властивість трапеції): Сума кутів, прилеглих до бічної сторони довільної трапеції, дорівнює 180°.

Доведення:

Нехай $ABCD$ — довільна трапеція.

AD та BC – основи трапеції $ABCD$.

$AD \parallel BC$ (за означенням трапеції)

AB — січна при двох паралельних прямих $AD \parallel BC$

Звідси, $\angle A$ та $\angle B$ – внутрішні односторонні кути.

$\angle A + \angle B = 180°$ (за властивістю внутрішніх односторонніх кутів)

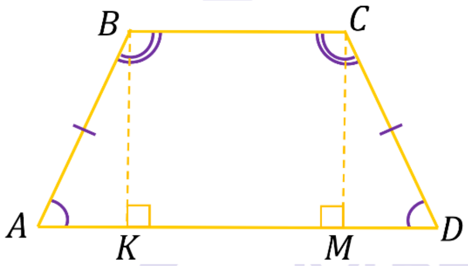
Аналогічно доведемо, що $\angle C + \angle D = 180°$.

Отже, сума кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, дорівнює 180°. Доведено!

Теорема (властивості рівнобічної трапеції):

1) Кути при основі рівнобічної трапеції рівні.

2) Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.



Доведення:

1) Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція.

AD та BC – основи трапеції $ABCD$.

$AD \parallel BC$ (за означенням трапеції)

Проведемо $BK \perp AD$, $CM \perp AD$.

Звідси, $BCMK$ – прямокутник (за ознакою прямокутника).

Розглянемо ΔAKB та ΔDMC — прямокутні:

$\angle K = \angle M = 90°$ (за властивістю перпендикуляра)

BK=CM (за властивістю протилежних сторін прямокутника)

$AB = CD$ (за властивістю бічних сторін рівнобічної трапеції)

Звідси, $\Delta AKB = \Delta DMC$ (за катетом та гіпотенузою)

Отже, $\angle A = \angle D$ (як відповідні елементи рівних трикутників)

Розглянемо $ABCD$ — трапеція.

$\angle A + \angle B = 180°$ (за властивістю кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції)

$\angle C + \angle D = 180°$ (за властивістю кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції)

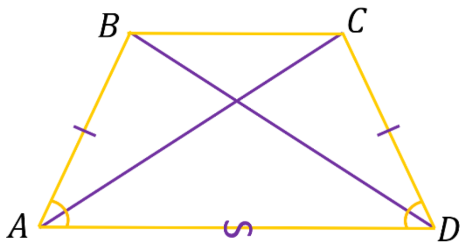
$\angle B = 180° - \angle A$

$\angle C = 180° - \angle D$

Звідси, $\angle B = \angle C$.

Отже, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$.

Доведено!



2) Нехай $ABCD$ – рівнобічна трапеція.
AC та BD – діагоналі трапеції.
Розглянемо ΔABD та ΔDCA:
$\angle BAD = \angle CDA$ (за властивістю кутів при основі рівнобічної трапеції)
$AB = CD$ (за властивістю бічних сторін рівнобічної трапеції)
AD – спільна сторона.

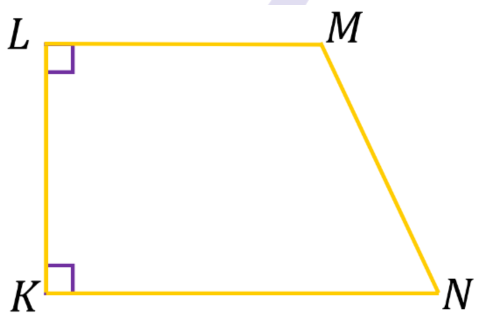
Звідси, $\Delta ABD = \Delta DCA$ (за двома сторонами та кутом між ними)

Отже, $AC = BD$ (як відповідні елементи рівних трикутників)

Доведено!

Теорема (властивість прямокутної трапеції): В прямокутній трапеції лише два кути прямі.

Доведення:



Нехай $KLMN$ – прямокутна трапеція.
$\angle K = \angle L = 90°$ (за означенням)
$\angle M + \angle N = 180°$ (за властивістю кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції)

Нехай $\angle M = \angle N = 180°:2 = 90°$.
$\angle K = \angle L = \angle M = \angle N = 90°$.

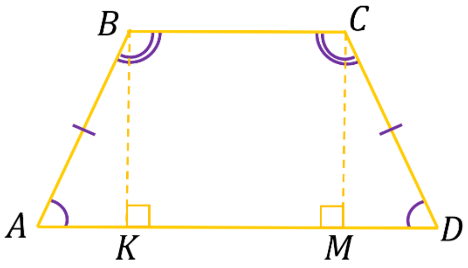
Звідси, $KLMN$ – прямокутник, а це суперечить умові, що $KLMN$ – прямокутна трапеція.

Отже, $\angle M \neq \angle N \neq 90°$.

Доведено!

Теорема (ознака рівнобічної трапеції): Якщо кути при основі трапеції рівні, то така трапеція рівнобічна.

Доведення:



Нехай $ABCD$ – трапеція.
BK та CM – висоти трапеції.
$\angle A = \angle D$ (за умовою)

Розглянемо ΔAKB та ΔDMC – прямокутні:
$\angle K = \angle M = 90°$ (за властивістю висоти)
$BK = CM$ (за властивістю висоти трапеції)
$\angle BAK = \angle CDM$ (за умовою)

Звідси, $\Delta AKB = \Delta DMC$ (за катетом та протилежним йому гострим кутом)
$AB = CD$ (як відповідні елементи рівних трикутників)

Отже, $ABCD$ – рівнобічна трапеція.

Доведено!