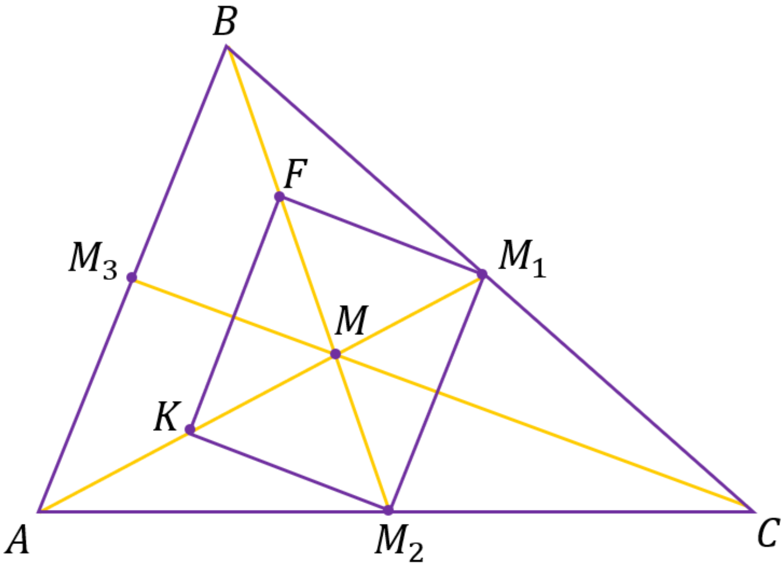
Властивість медіан трикутника

Теорема: Усі медіани трикутника проходять через одну точку і точкою пеетину діляться у відношенні 2: 1, починаючи з вершини.

Доведення:



Нехай ΔABC – даний трикутник, AM_1 і BM_2 — його медіани, що перетинаються в точці M.

Точка F — середина відрізка BM. Точка K — середина відрізка AM. Сполучимо послідовно точки M_1, M_2, F та K.

Оскільки M_1M_2 – середня лінія ΔABC, то $M_1M_2 \parallel AB$, $M_1M_2 = \frac{1}{2}AB$ (за властивостями середньої лінії трикутника).

Розглянемо ΔABM:KF — середня лінія даного трикутника.

$KF \parallel AB$, $KF = \frac{1}{2}AB$ (за властивостями середньої лінії трикутника).

Отже, чотирикутник KFM_1M_2 — паралелограм (за ознаками паралелограма).

За властивістю діагоналей паралелограма $FM = MM_2$ і $KM = MM_1$.

Звідси, $BF = FM = MM_2$ та $AK = KM = MM_1$.

Отже, $\frac{BM}{MM_2} = \frac{AM}{MM_1} = \frac{2}{1}$.

Теорему доведено!

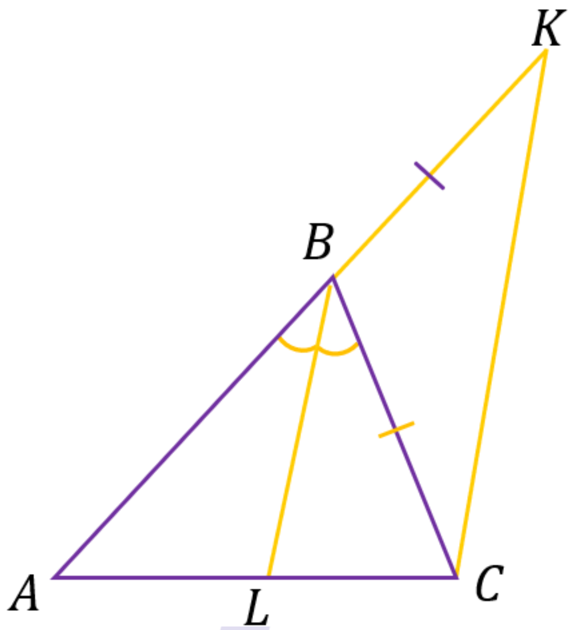
Провівши третю медіану CM_3, аналогічно можна показати , що точка перетину медіан також поділяє її у співвідношенні 2 :1.

Той факт, що три медіани перетинаються в одній точці, був доведений ще Архімедом.

Властивість бісектриси трикутника

Теорема: Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

Доведення:



Нехай ΔABC — довільний трикутник. BL — бісектриса $\angle ABC$ даного трикутника.

Доведемо, що $AL : LC = AB : BC$.

Проведемо пряму CK, паралельну бісектрисі BL, до перетину з продовженням сторони AB в деякій точці K.

$\angle ABL = \angle AKC$ (як відповідні кути при двох паралельних прямих CK та BL, та січній AK).

$\angle LBC = \angle BCK$ (як різносторонні кути при двох паралельних прямих CK та BL, та січній AK).

$\angle ABL = \angle LBC$ (за властивістю бісектриси кута)

Звідси, $\angle AKC = \angle BCK$.

Отже, ΔCBK — рівнобедренний (за ознакою рівнобедреного трикутника). Звідси, $BK = BC$ (за властивістю бічних сторін рівнобедреного трикутника).

За узагальненою теоремою Фалеса: $AL : LC = AB : BK$.

Оскільки $BK = BC$, отже, $AL : LC = AB : BC$.

Теорему доведено!