

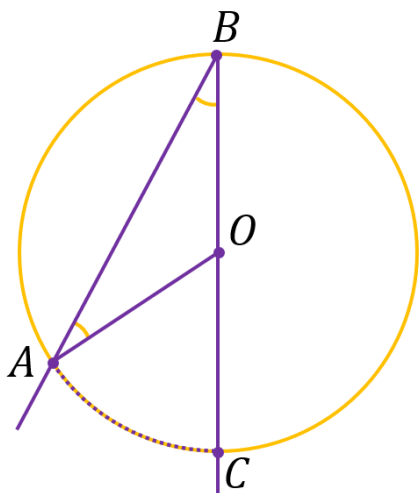
Вписаний кут

Теорема про вписаний кут: Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Доведення:

Нехай $\angle ABC$ – кут, вписаний в коло з центром O , що спирається на дугу AC . Доведемо, що $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$. Розглянемо три можливі випадки променя BO відносно $\angle ABC$.

1) Промінь BO співпадає з однією з сторін $\angle ABC$.



Нехай промінь BO співпадає з стороною BC $\angle ABC$. В такому випадку дуга AC менше півкола, тому $\angle AOC = \cup AC$.

$AO = OB$ (як радіуси кола).

Звідси, $\triangle AOB$ – рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника).

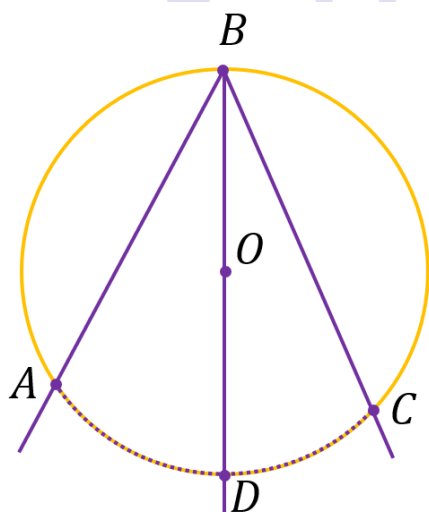
Оскільки $\angle AOC$ – зовнішній кут рівнобедреного $\triangle AOB$, а $\angle OAB = \angle OBA$ (як кути при основі рівнобедреного трикутника), то:

$$\angle AOC = \angle OAB + \angle OBA = 2\angle OBA.$$

Звідси, $2\angle OBA = \cup AC$.

Отже, $\angle ABC = \angle OBA = \frac{1}{2} \cup AC$.

2) Промінь BO ділить $\angle ABC$ на два кути.



Нехай промінь BO перетинає дугу AC в деякій точці D . Точка D поділяє дугу AC на дві дуги: $\cup AD$ та $\cup DC$, тобто $\cup AC = \cup AD + \cup DC$.

З раніше доведеного зрозуміло, що:

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD \text{ та } \angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC.$$

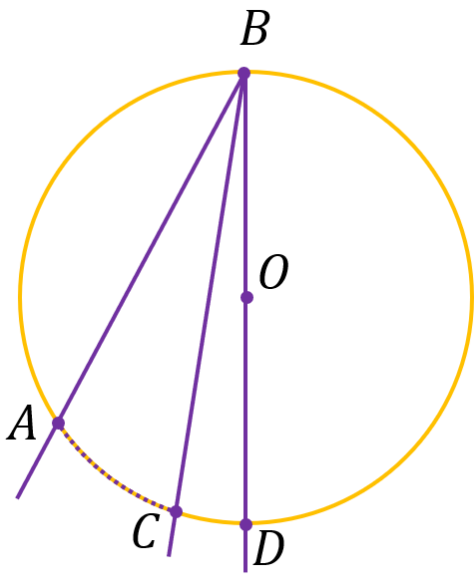
За основною властивістю вимірювання кутів:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC.$$

$$\text{Звідси, } \angle ABC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup DC)$$

Отже, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

3) Промінь BO не ділить $\angle ABC$ на два кути і не співпадає з жодною зі сторін даного кута



Нехай промінь BO лежить за межами $\angle ABC$.

За основною властивістю вимірювання кутів:

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD.$$

$$\text{Звідси, } \angle ABC = \angle ABD - \angle CBD.$$

З раніше доведеного, $\sphericalangle AD = \sphericalangle AC + \sphericalangle CD$,

$$\sphericalangle AC = \sphericalangle AD - \sphericalangle CD.$$

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \sphericalangle AD, \quad \angle CBD = \frac{1}{2} \sphericalangle CD.$$

$$\text{Звідси, } \angle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle AD - \frac{1}{2} \sphericalangle CD.$$

$$\text{Отже, } \angle ABC = \frac{1}{2} (\sphericalangle AD - \sphericalangle CD) = \frac{1}{2} \sphericalangle AC.$$

Доведено!