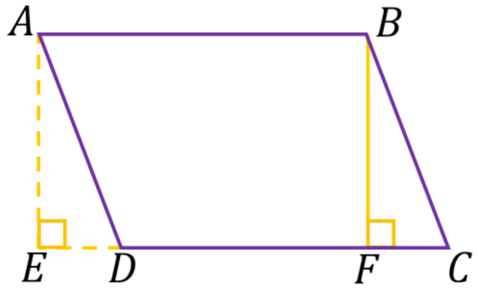
Площа паралелограма

Теорема (про площу паралелограма): Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.



Доведення:

Нехай $ABCD$ – даний паралелограм. Якщо він не є прямокутником, то один з його кутів $\angle A$ або $\angle B$ – гострий.

Нехай $\angle A$ – гострий, як зображено на рисунку.

Опустимо з вершини A на пряму CD перпендикуляр AE. Площа трапеції $ABCE$ дорівнює сумі площ паралелограма $ABCD$ і трикутника AED (за властивістю площі складених фігур).

Опустимо також перпендикуляр BF з вершини B на пряму CD. Тоді площа трапеції $ABCE$ дорівнює сумі площ прямокутника $ABFE$ і трикутника BFC.

AE та BF – висоти паралелограма.

Розглянемо ΔAED та ΔBFC – прямокутні ($\angle E = \angle F = 90°$ за властивістю перпендикуляра)

$AD = BC$ (за властивістю протилежних сторін паралелограма)

$AE = BF$ (за властивістю висоти паралелограма)

Звідси, $\Delta AED = \Delta BFC$ (за гіпотенузою та катетом)

$\Delta AED = \Delta BFC$, тому $S_{\Delta AED} = S_{\Delta BFC}$ (за основною властивістю площі)

$S_{ABCE} = S_{ABCD} + S_{\Delta AED}$

$S_{ABCE} = S_{ABFE} + S_{\Delta BFC}$

Ліві частини рівностей однакові, тому можемо прирівняти праві частини:

$$S_{ABCD} + S_{\Delta AED} = S_{ABFE} + S_{\Delta BFC}$$

$S_{ABCD} + S_{\Delta BFC} = S_{ABFE} + S_{\Delta BFC}$ (виконали заміну $S_{\Delta AED} = S_{\Delta BFC}$)

$$S_{ABCD} = S_{ABFE} + \cancel{S_{\Delta BFC}} - \cancel{S_{\Delta BFC}}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABFE}$$

$S_{ABFE} = AB \cdot BF$ (за формулою площі прямокутника)

Отже, площа паралелограма $S_{ABCD} = AB \cdot BF$.

Доведено!