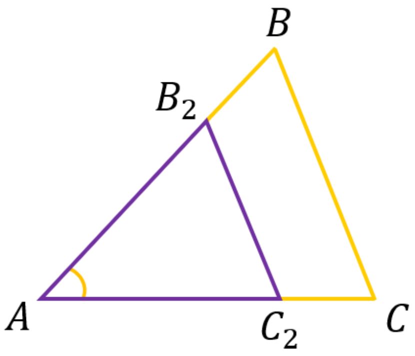
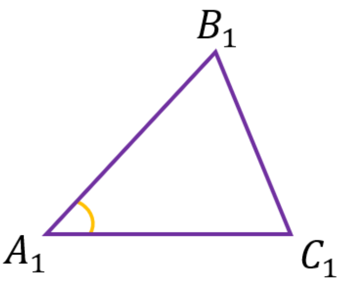
Ознаки подібності трикутників

Теорема (перша ознака подібності трикутника): Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Доведення:





Нехай дано трикутники ABC та $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Доведемо подібність даних трикутників. Для цього виконаємо додаткові побудови.

Відкладемо на стороні AB ΔABC відрізок AB_2, що дорівнює стороні A_1B_1 $\Delta A_1B_1C_1$.

Проведемо пряму B_2C_2, паралельну стороні BC ΔABC.

Звідси, $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ (як відповідні кути при двох паралельних прямих BC і B_2C_2, та січній AB).

Отже, $\Delta ABC \backsim AB_2C_2$ (оскільки пряма, що паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному).

За узагальненої теоремою Фалеса та з подібності трикутників: $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$.

$AB_2 = A_1B_1$ (за побудовою)

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (за умовою)

Звідси, $A_1C_1 = AC_2$.

Отже, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_2C_2$ (за першою ознакою рівності трикутників).

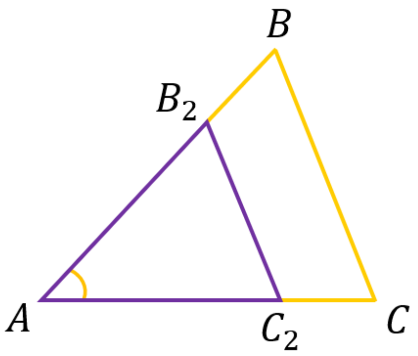
З доведеного, можемо зробити висновок, що $\angle ABC = \angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$.

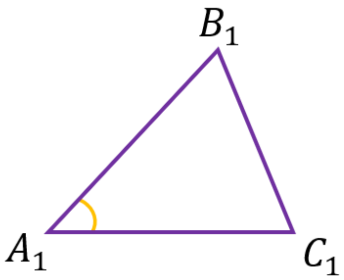
Отже, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Теорему доведено!

Теорема (друга ознака подібності трикутника): Якщо два кути одного трикутника рівні двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники є подібними.

Доведення:





Нехай дано ΔABC та $\Delta A_1B_1C_1$ – трикутники, в яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доведемо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

За теоремою про суму кутів будь-якого трикутника:

$\angle C = 180° - \angle A - \angle B$;

$\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$.

Звідси, $\angle C = \angle C_1$.

Відкладемо на промені AB відрізок AB_2, що дорівнює стороні A_1B_1 і проведемо пряму B_2C_2, паралельну прямій BC.

Звідси, $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ (як відповідні кути при двох паралельних прямих BC і B_2C_2, та січній AB).

Отже, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_2C_2$ (за другою ознакою рівності трикутників).

Звідси, $AC_2 = A_1C_1$(як відповідні сторони рівних трикутників).

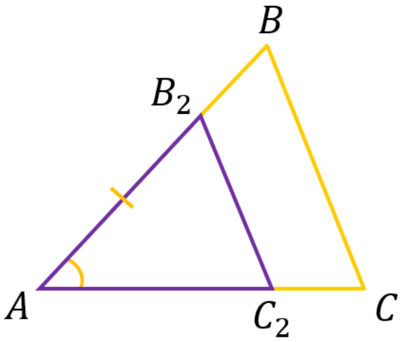
За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, отже, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

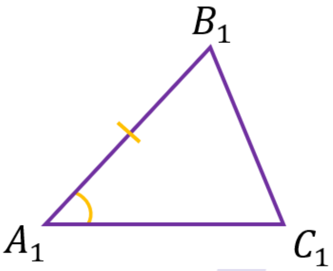
Аналогічно доводимо, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Отже, за означенням подібних трикутників, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Теорему доведено!

Теорема (третя ознака подібності трикутника): Якщо два кути одного трикутника рівні двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники є подібними.





Доведення:

Нехай дано ΔABC та $\Delta A_1B_1C_1$ – трикутники, в яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Доведемо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Як і в попередніх теоемах, відкладемо на промені AB відрізок AB_2, що дорівнює стороні A_1B_1 і проведемо пряму B_2C_2, паралельну прямій BC.

Звідси, $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ (як відповідні кути при двох паралельних прямих BC і B_2C_2, та січній AB).

Отже, $\Delta ABC \backsim \Delta AB_2C_2$ (за двома кутами).

Звідси, $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AC}{AC_2}$. А оскільки $AB_2 = A_1B_1$ (за побудовою), то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_2C_2}$.

Враховуюси, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, маємо $B_2C_2 = B_1C_1$.

Аналогічно доводимо, що $AC_2 = A_1C_1$.

Отже, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_2C_2$ (за третьою ознакою рівності трикутників).

Звідси, $\angle A = \angle A_1$, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = AB_2C_2$.

Отже, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ (за двома кутами)

Теорему доведено!

Отже, для доведення всіх трьох ознак подібності трикутників використано однаковий спосіб, а доведення кожної з ознак подібності трикутників реалізується через певну відповідну їй ознаку рівності трикутників.