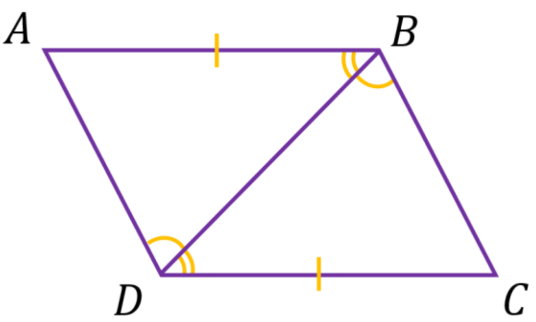
Ознаки паралелограма

Теорема 1: Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні і рівні, то цей чотирикутник – паралелограм.



Доведення:

Розглянемо чотирикутник $ABCD$.

$AB \parallel CD$; $AB = CD$ (за умовою);

BD – діагональ паралелограма.

Розглянемо ΔABD та ΔCDB:

$AD = BC$ (за умовою);

BD – спільна сторона;

$\angle ABD = \angle CDB$ (як внутрішні різносторонні кути при двох паралельних прямих AB і CD та січній BD);

Звідси, $\Delta ABD = \Delta CDB$ (за двома сторонами та кутом між ними).

$\angle CBD = \angle ADB$ (як відповідні кути рівних трикутників).

Але, $\angle CBD = \angle ADB$ (як внутрішні різносторонні кути при двох паралельних прямих AD і BC та січній BD)

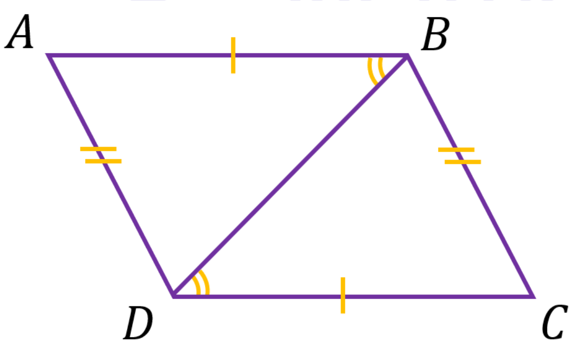
Звідси, $AD \parallel BC$ (за ознакою паралельності прямих)

Отже, у чотирикутнику $ABCD$ сторони попарно паралельні: $AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$;

Звідси, чотирикутник $ABCD$ – паралелограм (за означенням).

Доведено!

Теорема 2: Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник – паралелограм.



Доведення:

Розглянемо чотирикутник $ABCD$.

$AB = CD$; $AD = BC$ (за умовою);

Проведемо BD – діагональ паралелограма.

Розглянемо ΔABD та ΔCDB:

$AB = CD$ (за умовою);

$AD = BC$ (за умовою);

BD – спільна сторона;

Звідси, $\Delta ABD = \Delta CDB$ (за трьома сторонами).

$\angle ABD = \angle CDB$ (як відповідні кути рівних трикутників)

Але, $\angle ABD = \angle CDB$ (як внутрішні різносторонні кути при двох паралельних прямих AB і CD, та січній BD)

Звідси, $AD \parallel BC$ (за ознакою паралельності прямих)

У чотирикутнику $ABCD$ сторони попарно паралельні та рівні:

$AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$;

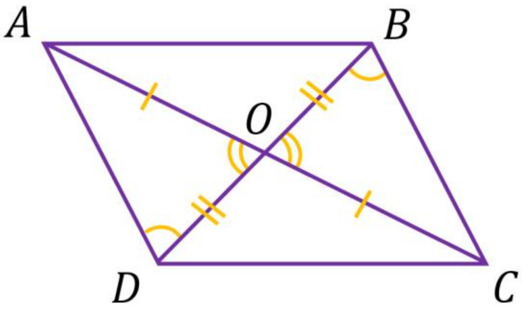
$AB = CD$; $AD = BC$;

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм (за попередньо доведеною ознакою)

Доведено!

Теорема 3: Якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник – паралелограм.

Доведення:



Розглянемо чотирикутник $ABCD$.

AC та BD — діагоналі чотирикутника;

Точка O — точка перетину діагоналей AC та BD;

$AO = OC$; $BO = OD$ (за умовою).

Розглянемо ΔAOD та ΔCOB:

$\angle AOD = \angle COB$ (як вертикальні кути)

$AO = OC$(за умовою);

$BO = OD$ (за умовою).

Звідси, $\Delta AOD = \Delta COB$ (за двома сторонами та кутом між ними).

$AD = CB$ (як відповідні сторони рівних трикутників)

$\angle ADB = \angle CBD$ ((як відповідні кути рівних трикутників)

Звідси, $AD \parallel CB$ (за ознакою паралельності прямих)

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Доведено!