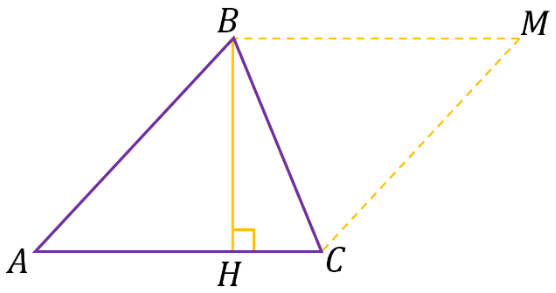
Формули площі трикутника

Теорема 1: Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.



Доведення:

Нехай ΔABC – довільний.

BH – висота трикутника, опущена на сторону AC.

На стороні BC даного трикутника побудуємо рівний йому трикутник BCM.

$$\Delta BCM = \Delta ABC$$

$$\left.\begin{aligned} &\angle BAC = \angle BMC \\ &AB = CM \\ &BM = AC \end{aligned}\right\}$$ (як відповідні елементи рівних трикутників)

Звідси, чотирикутник $ABMC$ – паралелограм (за ознаками паралелограма)

За формулою площі паралелограма: $S_{ABMC} = AC \cdot BH$.

Оскільки, $\Delta BCM = \Delta ABC$, то $S_{\Delta BCM} = S_{\Delta ABC}$ (за властивістю площ рівних фігур)

$S_{ABMC} = S_{\Delta BCM} + S_{\Delta ABC}$ (за властивістю площі складеної фігури)

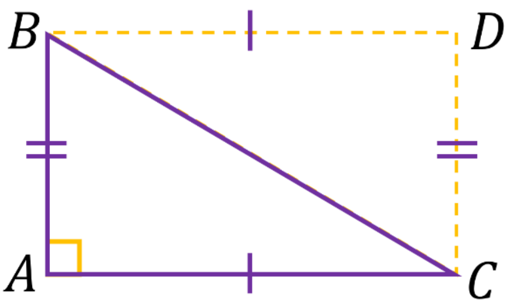
$$S_{ABMC} = S_{\Delta BCM} + S_{\Delta ABC} = 2 \cdot S_{\Delta ABC}$$

Звідси, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABMC}$

Отже, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

Доведено!

Теорема 2: Площа трикутника дорівнює половині добутку його катетів.



Доведення:

Нехай ΔBAC – даний прямокутний трикутник.

$\angle A = 90°$

Через вершини B і C ΔBAC проведемо прямі, паралельні сторонам AC і AB відповідно і отримаємо точку D.

Звідси, $ABDC$ − прямокутник (за означенням)

Розглянемо ΔBAC та ΔBDC – прямокутні ($\angle A = \angle D = 90°$)

$AB = CD$; $AC = BD$ (за властивістю протилежних сторін прямокутника)

Звідси, $\Delta BAC = \Delta BDC$ (за двома катетами)

Оскільки, $\Delta BAC = \Delta BDC$, то $S_{\Delta BAC} = S_{\Delta BDC}$ (за властивістю площ рівних фігур)

$S_{ABDC} = S_{\Delta BAC} + S_{\Delta BDC}$ (за властивістю площі складеної фігури)

$$S_{ABDC} = S_{\Delta BAC} + S_{\Delta BDC} = 2 \cdot S_{\Delta BAC}$$

$$S_{ABDC} = BA \cdot AC$$

Звідси, $S_{\Delta BAC} = \frac{1}{2} S_{ABDC}$

Отже, $S_{\Delta BAC} = \frac{1}{2} BA \cdot AC$.

Доведено!