

Доведення властивостей арифметичного квадратного кореня

1. **Тотожність** $(\sqrt{a})^2 = a$, при $a \geq 0$.

Доведення:

$$\sqrt{a} = x, \text{ причому } x^2 = a \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

Доведено!

2. **Тотожність** $\sqrt{a^2} = |a|$, при a – будь-яке дійсне число.

Доведення:

$$\left. \begin{array}{l} |a| \geq 0 \text{ при будь-якому } a \\ |a|^2 = a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow (\sqrt{a^2})^2 = |a|^2$$

Доведено!

3. **Теорема про корінь із степеня:**

$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$, при a – будь-яке дійсне число.

Доведення:

$$\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2}$$

З попередньої властивості маємо: $\sqrt{(a^n)^2} = |a^n| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^{2n}} = |a^n|$

Доведено!

4. Теорема про корінь із добутку:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \text{ при } a \geq 0, b \geq 0.$$

Доведення:

$$\left. \begin{array}{l} a \geq 0, b \geq 0 \implies \sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab}, \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ – невід'ємні} \\ (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab \end{array} \right\} \implies \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Доведено!

5. Теорема про корінь із частки:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ при } a \geq 0, b > 0.$$

Доведення:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{a} \geq 0 \text{ при } a \geq 0, \sqrt{b} > 0 \text{ при } b > 0 \implies \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0 \\ \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b} \end{array} \right\} \implies \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Доведено!