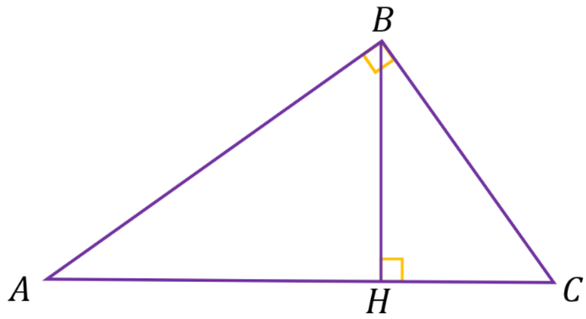
Теорема про середні пропорційні відрізки

Теорема: У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проєкціями катетів на гіпотенузу.

Доведення:



Нехай ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом B ($\angle B = 90°$).

Проведемо висоту BH з вершини прямого кута B до гіпотенузи AC.

Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta AHB$; $\Delta ABC \sim \Delta BHC; \Delta BHC \sim \Delta AHB.$

Трикутники ΔABC та ΔAHB подібні за першою ознакою подібності трикутників ($\angle A$ – спільний, $\angle ABC = \angle AHB = 90°$).

Трикутники ΔABC та ΔBHC подібні за першою ознакою подібності трикутників ($\angle C$ – спільний, $\angle ABC = \angle CHB = 90°$).

Розглянемо ΔBHC та ΔAHB:

$\angle AHB = \angle CHB = 90°$ (за властивістю висоти);

$\angle BAC = 90° - \angle BCA$ (за властивістю суми гострих кутів прямокутного трикутника);

$\angle HBC = 90° - \angle BCH$ (за властивістю суми гострих кутів прямокутного трикутника);

$\angle BCA = \angle BCH.$

Звідси, $\angle BAC = \angle HBC.$

Отже, $\Delta BHC \sim \Delta AHB$ (за першою ознакою подібності трикутників).

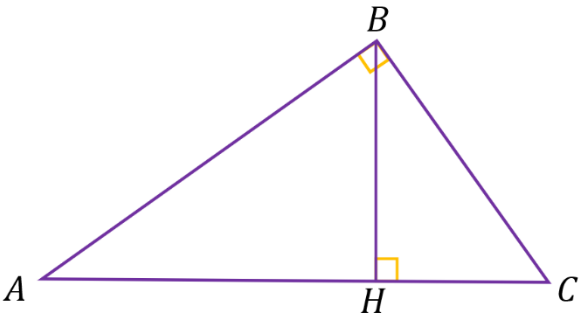
З подібності трикутників ($\Delta BHC \sim \Delta AHB$) отримаємо відношення: $\frac{AH}{BH} = \frac{BH}{HC}$.

Отже, $BH^2 = AH \cdot HC.$

Теорему доведено!

Теорема: У прямокутному трикутнику катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.

Доведення:



З раніше доведеного: ΔABC та ΔAHB- подібні за першою ознакою подібності трикутників ($\angle A$ – спільний, $\angle ABC = \angle AHB = 90°$).

З подібності трикутників ($\Delta ABC \sim \Delta AHB$) отримаємо відношення: $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AH}$.

Звідси, $AB^2 = AH \cdot AC$.

Отже, $AB = \sqrt{AH \cdot AC}$.

З раніше доведеного: ΔABC та ΔBHC подібні за першою ознакою подібності трикутників ($\angle C$ – спільний, $\angle ABC = \angle CHB = 90°$).

З подібності трикутників ($\Delta ABC \sim \Delta BHC$) отримаємо відношення: $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{HC}$.

Звідси, $BC^2 = HC \cdot AC$.

Отже, $BC = \sqrt{HC \cdot AC}$.

Теорему доведено!